Examen Logique Mathématique

Exercice 1 : 6 pts (1,5-1,5-1,5-1,5)

Montrer les déductions suivantes dans le langage $\mathcal{Lp}(\forall, \neg, \wedge, \rightarrow)$ avec $\alpha \vee \beta =_{def} \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$:

1. $P \rightarrow Q \vee R,\ Q \rightarrow S \vdash P \rightarrow S \vee R$
2. $P \vee Q \rightarrow R \vdash (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$
3. $\exists x\ P(x) \wedge Q(x),\ \forall x\ (P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \vdash \exists x\ \neg P(x)$
4. $\exists x\ \forall y\ \neg P(x, y) \vdash \forall y\ \exists x\ \neg P(x, y)$

Exercice 2 : 6pts ((0,5-0,5-1)-0,5-1-2-0,5)

Dans cet exercice, on démontrera la déduction suivante en utilisant l'algorithme de réfutation adapté aux formules de la logique des prédicats :

$$\forall x\ (P(x) \vee Q(b) \rightarrow \forall y\ R(x,y)),\ (\forall y\ Q(y)) \vee P(a) \vdash \exists x\ (P(x) \vee \exists y\ R(x, y))$$

Donc, il faut montrer que l'ensemble des hypothèses et la négation de la conclusion est inconsistant et on a dans ce cas l'ensemble Γ suivant :

$\Gamma = \{\alpha 1 : \forall x\ (P(x) \vee Q(b) \rightarrow \forall y\ R(x,y)),\ \alpha 2 : (\forall y Q(y)) \vee P(a),\ \alpha 3 : \neg\exists x(P(x) \vee \exists y R(x, y))\}$.

Pour commencer, il faut mettre les formules sous forme prénexe. Une formule est dite sous forme prénexe si elle est de la forme : $Q_1x_1\ Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\ \varphi$ où chaque Qi est un quantifieur $\forall$ ou $\exists$ et φ est une formule sans quantifieur.

Pour obtenir la forme prénexe, on utilise les équivalences suivantes :

a. $\neg\exists x\ \alpha(x) \equiv \forall x\ \neg\alpha(x)$
b. $(\forall x\ \alpha(x)) \vee \beta \equiv \forall x\ (\alpha(x) \vee \beta)$ x non libre dans β
c. $\alpha \vee \exists x\ \beta(x) \equiv \exists x\ (\alpha \vee \beta(x))$ x non libre dans α
d. $\alpha \rightarrow \forall x\ \beta(x) \equiv \forall x\ (\alpha \rightarrow \beta(x))$ x non libre dans α

1. Donner les formes prénexes des formules de Γ. Soit $\Gamma 1$ l'ensemble obtenu.
2. Donner $\Gamma 2$ l'ensemble des formules de $\Gamma 1$ en éliminant les quantifieurs.
3. Rappeler les clauses de l'algorithme de réfutation des connecteurs $\vee$ et $\rightarrow$.
4. Appliquer l'algorithme de réfutation sur l'ensemble des formules de $\Gamma 2$ en considérant que chaque prédicat appliqué à des termes (c-à-d chaque formule atomique) correspond à une variable propositionnelle.
5. Pour quelles valeurs de x et y, $\Gamma 2$ est inconsistant. Justifier votre réponse.

Examen Logique Mathématique

Exercice 3 : 8pts ((0,5-0,5-0,5-1)-(1-1-1,5)2)

Soit L un langage du premier ordre avec égalité contenant :

- Trois symboles de prédicats E et P d'arité un et S d'arité deux ;
- Un symbole de constante a ;
- Trois symboles de fonctions som et moins d'arité deux et carré d'arité un.

On définit pour L l'Interprétation I telle que :

- Domaine d'interprétation : $\mathcal{Z}$ (l'ensemble des entiers relatifs) ;
- I(E)(x) = "x est un Entier positif"
- I(P)(x) ="x est imPair";
- I(S)= "≥ "
- I(moins)(x,y)=x-y
- I(carré)(x)=x*x
- I(som)(x,y)=x+y
- I(a)=1.

I) Ecrire dans le langage L les phrases suivantes :

1. "Le carré d'un nombre impair est impair".
2. "Un nombre x est impair ssi il existe un nombre k tel que x=2k+1"
3. "Tout entier positif impair est la différence de deux carrés".
4. Le carré de la somme de deux nombres quelconques est strictement supérieur à la somme des carrés de ces deux nombres.

II) Etudier pour l'interprétation I la validité/satisfiabilité des formules suivantes :

1. $\alpha 1 = \forall x\ \forall y\ (P(x) \wedge \neg P(y) \rightarrow P(som(x,y)))$
2. $\alpha 2 = \neg P(som(x,som(x,a)))$
3. $\alpha 3 = S(x, y) \wedge moins(carré(x), carré(y)) = z \rightarrow P(z)$

III) Soient Γ un ensemble de formules de la logique des prédicats et α une formule de la logique des prédicats tels que $\Gamma \vdash \alpha$. Peut-on trouver un modèle pour l'ensemble Γ qui ne soit pas un modèle pour α? Justifier votre réponse.